

# 频域建模及在机电系统中的应用

周兆英 杨进 张毅 宋刚

(清华大学 精密仪器及机械学系,北京 100084)

**摘要** 本文讨论动力学参数估计的频域方法,及其在机电系统的测量、仿真、补偿及控制中的应用。频域建模可表述为一种由谱估计和参数估计相结合的两步算法。在传感器、执行器和精密机械系统中有一些较成功的应用。

**关键词:** 数学模型;参数估计;频域方法;机电系统

## 1 前言

动力学系统的数学物理模型及其实验建模方法是一个比较成熟又有广泛应用的领域,而随着高质量的频谱分析仪器和计算机技术的发展,这种方法和理论又有一些新的进展。本文将介绍频域建模的基本理论和方法,和在机电系统的测量、仿真、动态补偿和控制中应用的一些典型例子。

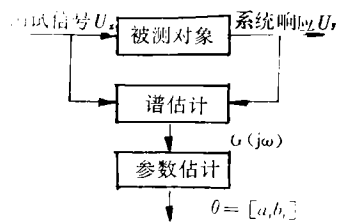
频率特性分析是经典信号分析和控制理论的基础。E. C. Levy 于 1959 年提出基于频率响应数据的参数估计方法,其后有一系列的改进和发展。一些作者,例如 A. H. Whitfield 等,提出了不同的性能指标而得到不同的频域参数估计算法。L. Ljung 论述了频域参数估计和时间域参数估计之间的关系。本文作者<sup>[1]</sup>曾把频域建模归纳为一个两步算法,并用统一形式的性能指标对频域参数估计的几个基本方法做了推导和分析,对频域方法的估计误差有进一步研究<sup>[2]</sup>。一个重要的差别是:许多作者在得到算法后只有一些数值仿真的结果,而本文积累了一系列具体的工程应用,特别是在机电系统建模中的应用。

在电磁式速度传感器的实验研究中,频域方法能简便地估计出其全部动力学参数并转换为相应的物理参数<sup>[3]</sup>;在使用电子测量仪器时,这种方法还能给出仪器不同通道间的时延;在光盘机双向微动执行器的实验研究中,除了能估计出两个方向动力学特性外,还能通过交叉干扰建模和仿真,估计机电元件的几何误差,显示其变化的各种结果<sup>[4]</sup>;有了传感器的动力学模型,可以设计补偿环节,做出超低频或高频响应传感器,国内、外已有一些实际产品,如<sup>[5]</sup>;在光盘库机械手的最短时间控制中,又用频域方法研究了步进电机的线性化模型<sup>[6]</sup>。这些实例是一系列工程应用的自然积累和发展。

## 2 频域建模方法

文献<sup>[1]</sup>文中把动力学参数估计的频域方法表述为一种由谱估计和参数估计相结合的两步

算法,如图 1 所示。由被测对象  $n$  个输入—输出数据对  $\{x(k), y(k), k = 1, 2, \dots, n\}$  估计出谱密度函数  $\hat{S}_{xx}(j\omega)$  和  $\hat{S}_{xy}(j\omega)$  于是可得到频率响应数。



$$\hat{G}(j\omega_k) = \frac{\hat{S}_{xy}(j\omega_k)}{\hat{S}_{xx}(j\omega_k)}, k = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

第二步,利用一种频域曲线拟合方法,由频率响应数据  $\{\hat{G}(j\omega_k), k = 1, 2, \dots, n\}$  估计出传递函数

$$G(S) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}{1 + a_1s + \dots + a_ns^n} = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2)$$

图 1 两步估计算法

参数  $\theta = [b_0, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]^T$  定义损失函数

$$J = \sum_{k=1}^N |q(k)[G(j\omega_k) - \hat{G}(j\omega_k)]|^2$$

其中权多项式有几种不同选择,例如:

1.  $q(k) = A(j\omega_k)$ , 使  $J$  最小就得到线性化方法;

2.  $q(k) = A(j\omega_k)W_{kL}^2$ ,  $W_{kL} = |A(j\omega_k)_{L-1}|^2$ , 得到一种迭代算法。其中  $L-1, L$  分别代表第  $L-1$  次和第  $L$  次迭代;

3.  $q(k) = 1$ , 得到非线性最优化方法。

还有一些其它的权多项式形式及相应的参数估计算法。作为估计精度的考核,可以求出协方差矩阵  $COV(\hat{\theta})$ , 或  $\hat{\theta}$  的渐近方差下界:

$$COV(\hat{\theta}) \geq M^{-1}(\theta)$$

其中  $M(\theta)$  是输入为  $\{x(k)\} \sim n(0, 1)$  时, 输出随机过程  $\{y(k)\}$  的信息阵。

### 3 应用

#### 3.1 测量

动圈式速度传感器和光盘机中双向微动执行器的动力学参数估计, 以及电子仪器中不同测量通道间的时延差估计, 都可用频域建模方法。一个具有活动线圈的磁电式传感器的测量状态和工作状态的原理图如图 2 所示。

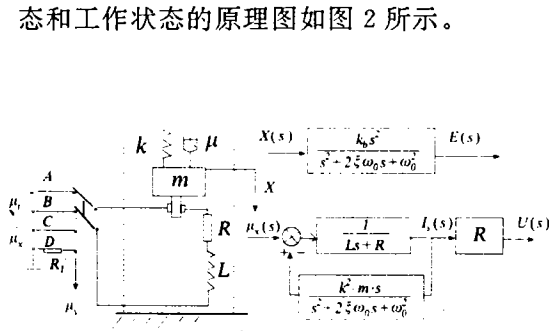


图 2 速度传感器实验原理图

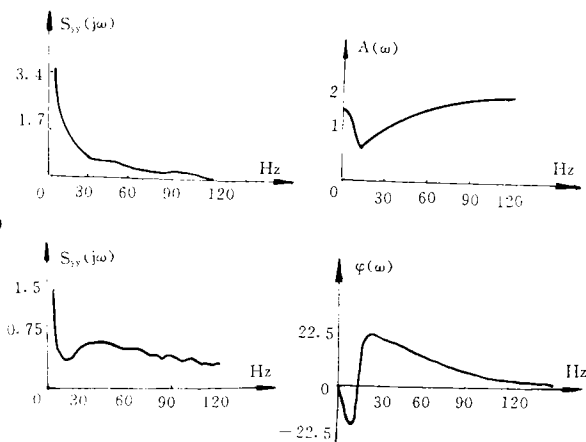


图 3 速度传感器的谱估计和频率响应

其测量状态的传递关系为：

$$\begin{aligned} \frac{U_y(s)}{U_x(s)} &= \frac{R_1(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2)}{(Ls + R)(s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2) + \frac{k_a k_b}{m}} \\ &= \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^2} \end{aligned}$$

式中符号分别为：测量电阻  $R_1$ ，线圈的电阻  $R$  和电感  $L$ ，活动部分质量  $m$ ，阻尼系数  $\mu$  和相对阻尼系数  $\zeta$ ，弹簧刚度  $k$  和自然频率  $\omega$ ，电磁力系数  $k_a$  和感应电动势系数  $k_b$ 。实验时速度传感器的谱估计频率响应曲线如图 3 所示。基于频率响应数据估计(5)的参数  $\theta[b_0, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3]^T$ ，它和物理参数的关系为：

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{b_0}{b_2}}, \quad \zeta = \frac{b_1}{2\sqrt{b_0 b_2}}, \quad R = R_1\left(\frac{1}{b_0} - 1\right), \quad L = R_1 \frac{a_3}{b_2} \\ k_a &= k_b = \sqrt{m R_1 \left(\frac{a_1}{b_1} - \frac{b_1}{b_0 b_2} - \frac{b_0 a_3}{b_2^2}\right)} \end{aligned}$$

对一组物探用速度传感器的参数估计值为： $k_1 = 0.32 \text{V} \cdot \text{s/cm}$ ， $\zeta = 0.52$ ， $\omega = 10.2 \text{Hz}$ ， $R = 458 \Omega$ ， $L = 89.6 \text{mH}$ ，误差为百分之几，而曲线拟合误差对线性算法小于 0.1%，迭代算法小于 0.01%，非线性最优化方法有更高的估计精度。

如果考虑输入输出通道之间有时延差  $\tau$ ，则：

$$\frac{U_y(s)}{U_x(s)} = G(s)e^{-\tau s}$$

对小时延，可用  $e^{-\tau s} = 1 - \tau s$  或  $(1 + \tau s)^{-1}$  代入，仍用前面的估计方法。如某频谱分析仪用上述方法得  $\tau = 1 \times 10^{-5} \text{s}$ ，提高了被测对象参数估计精度。对一般情况<sup>[2]</sup>。

### 3.2 仿真

光盘机中双向微动执行器的原理图如图 4(a) 所示，如定义聚焦线圈力轴和运动轴方向分别为  $x_f$  和  $F_f$ ，道跟踪线圈为  $X_t$  和  $F_t$ ，其几何偏差角分别为  $\alpha$ 、 $\beta$  和  $\gamma$ ，如图 4(b) 所标注。数学模型可写成：

$$\begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_f(s) \\ I_t(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_f(s) \\ U_t(s) \end{bmatrix}$$

其中：

$$G_{11}(s) = R_f + L_f s + \frac{k_{af} + k_{bf} s}{m_f s^2 + \mu_f s + k_f}$$

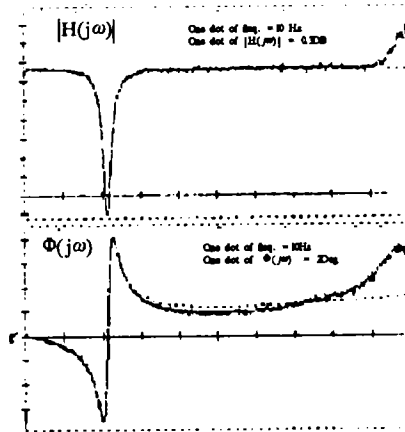
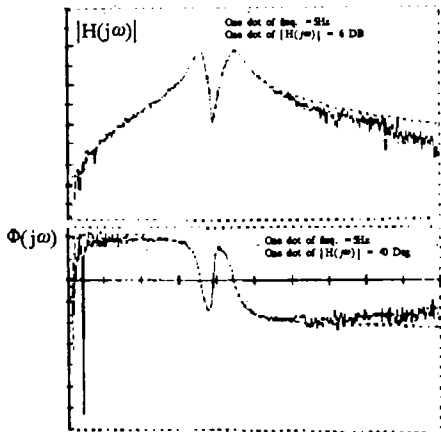
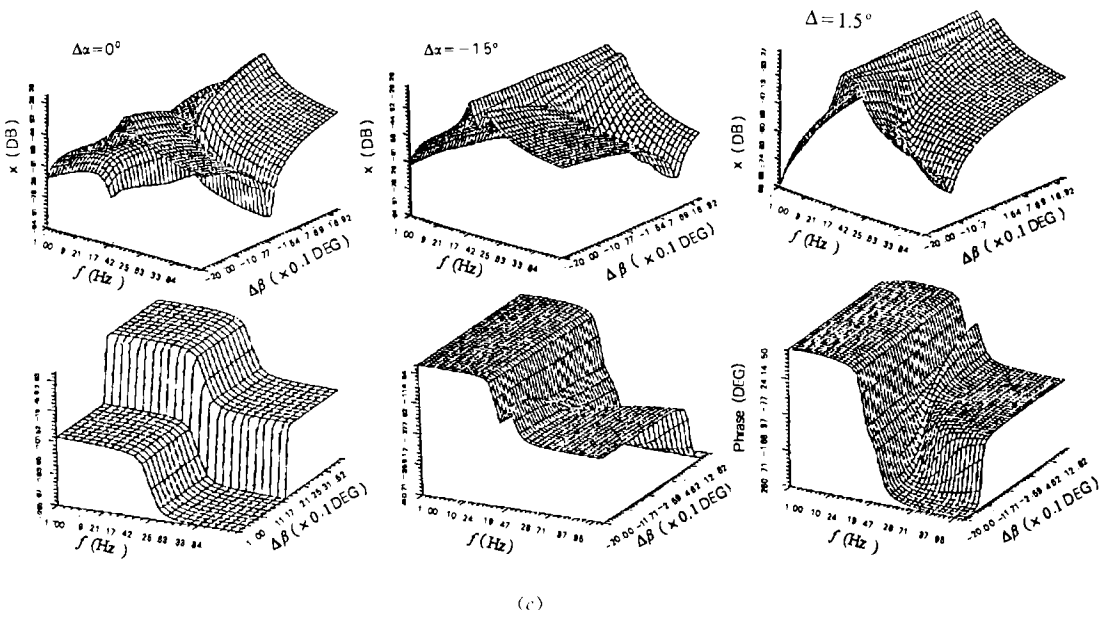
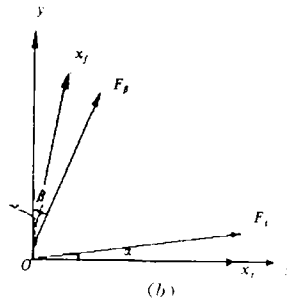
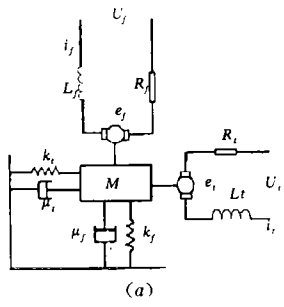
$$G_{12}(s) = K_{at} \cdot K_{bt} \cdot \frac{\Delta_\alpha s}{m_f s^2 + \mu_f s + k_f} + \frac{\Delta_\beta s}{m_t s^2 + \mu_t s + k_t}$$

$$G_{21}(s) = K_{af} \cdot K_{bt} \cdot \left( \frac{(\Delta_\alpha + \Delta_\gamma) s}{m_f s^2 + \mu_f s + k_f} + \frac{(\Delta_\beta - \Delta_\gamma) s}{m_t s^2 + \mu_t s + k_t} \right)$$

$$G_{22}(s) = R_t + L_t s + \frac{K_{at} K_{bt} s}{m_t s^2 + \mu_t s + K_t}$$

及  $\Delta_\alpha = \alpha$ ， $\Delta_\beta = \frac{\pi}{2} - \beta$  和  $\Delta_\gamma = \frac{\pi}{2} - \gamma$

式中符号除下标  $f$  和  $t$  分别代表聚焦和道跟踪方向外，其它基本符号意义同(5)。



(d) (e)  
图4 双向微动执行器的原理图、仿真和实测曲线

(8)式是执行器参数估计和数值仿真的基础。由实验中测得的输出输入数据对

$$\{x_i(k), y_i(k), i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, n\}$$

可得相应的各种谱估计和频率响应数据,进而估计和换算出参数:

$$\theta_f^r = [K_f, R_f, L_f, \zeta_f, \omega_f]$$

$$\theta_f^l = [K_l, R_l, L_l, \zeta_l, \omega_l]$$

$$\theta_0^r = [\alpha, \beta, \gamma]$$

已知  $\theta_l$  和  $\theta_r$ , 就可对各种  $\alpha, \beta, \gamma$  值的交叉干扰进行仿真。当知道这些误差角对交叉干扰的影响, 就可确定合理的加工和装配要求, 以及在控制系统是否要考虑解耦问题。图 4 (c) 是仿真结果, 图 4 (d) 和图 4 (e) 是实测的  $G_{12}(j\omega_k)$  和  $G_{11}(j\omega_k), k = 1, 2, \dots, n$ 。

### 3.3 补偿

图 2 所示动圈式速度传感器在工作状态下传递关系为:

$$\frac{U_y(s)}{sX(s)} = \frac{K_s s^2}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2} = G_0(s)$$

如果传感器动态特性是相对稳定的, 可采用串联补偿:

$$G_B(s) = \frac{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

则带有补偿环节的传递关系可接近为:

$$G_0(s)G_B(s) = \frac{K_s s^2}{s^2 + 2\zeta_1\omega_1 s + \omega_1^2}$$

例如某传感器  $\omega = 10\text{Hz}, \zeta = 0.5$ , 补偿后可达  $\omega_1 = 0.5\text{Hz}, \zeta_1 = 0.7$ 。

当然也可以采用反馈补偿方案, 现已有了这类产品。

### 3.4 控制

有一个课题把步进电机工作于闭环状态, 以达到高精度的运动控制。为此要建立步进电机的动力学模型, 才能确定控制律。设永磁混和型步进电机控制线圈原理图为图 5 (a), 在忽略暗电流和磁滞效应, 假设定子齿的磁势按正弦变化, 则步进电机的动力学模型是非线性的:

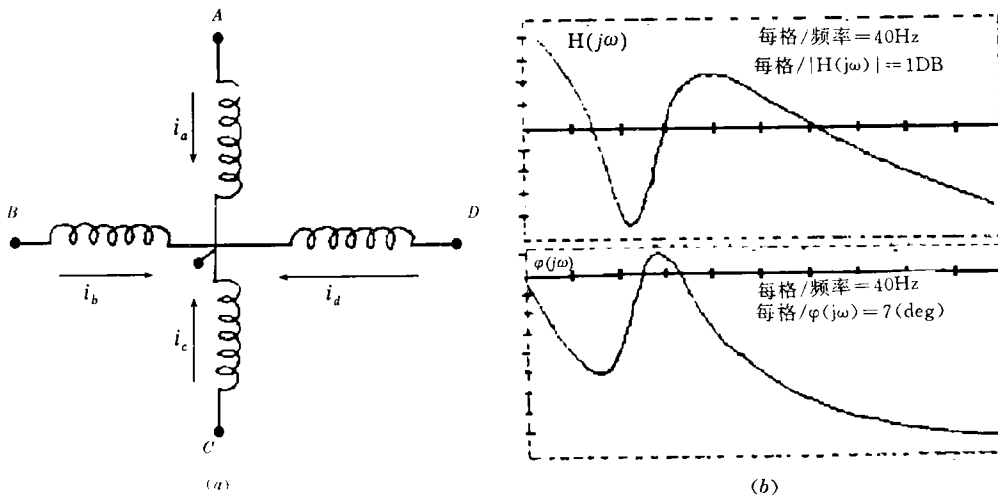


图 5 步进电机控制线组及频率响应

$$\dot{\theta} = \omega$$

$$\dot{\omega} = T - \frac{\mu}{J} - T_D$$

$$T = -K_{rac}(I_{ac})\sin(N_r\theta) - K_{rbd}\sin(N_r\theta - \frac{\pi}{2})$$

$$I_{ac} \frac{1}{\Delta_{ac}} \left[ \frac{V_{ac}}{2} - \frac{rI_{ac}}{2} + K_a(I_{ac})N_r\omega\sin(N_r\theta) \right]$$

$$I_{db} = \frac{1}{\Delta_{db}} \left[ \frac{V_{db}}{2} - \frac{rI_{db}}{2} + K_b(I_{db})N_r\omega\sin(N_r\theta - \frac{\pi}{2}) \right]$$

其中：

$$\Delta_{ac} = L_1 + \frac{dL_1}{dI_{ac}}I_{ac} + \frac{dK_{ac}(I_{ac})}{dI_{ac}}\cos(N_r\theta)$$

$$\Delta_{db} = L_1 + \frac{dL_1}{dI_{db}}I_{db} + \frac{dK_{db}(I_{db})}{dI_{db}}\cos(N_r\theta - \frac{\pi}{2})$$

式中符号分别为：电机的转角  $\theta$ ，转速  $\omega$ ，转动惯量  $J$ ，转矩  $T$ ，阻尼系统  $\mu$ ，阻力矩  $T_D$ ，转力齿数  $N_r$ ，相电感  $L_1$ ，相电阻  $r$ ，相电流  $I_i$ ，相电压  $V_i$ ，其中  $i = a, b, c, d$ 。还有  $I_{ac} = I_a - I_c, I_{db} = I_b - I_d, V_{ac} = V_a - V_c, V_{bd} = V_b - V_d$

在不饱和条件下，电机工作于  $N_{r0} = 0$  附近，并仅用一项驱动，可得到线性化结果：

$$\frac{I_{db}(s)}{V_{db}(s)} = \frac{b_0 + b_1s}{1 + a_1s + a_2s^2}$$

如考虑步进电机的启动特性，则有：

$$\frac{I_{db}(s)}{V_{db}(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4}$$

以线性化模型为参考，根据实验所得的频率特性图 (b)，就可以估计参数并换算出物理参数。这个过程与传感器动力学参数估计相同，但因符号多，太占篇幅，这里就不详述了。作者还用以上结果做了光盘库中机械手控制的运动分析。

## 4 结 束 语

频域建模方法是一个有效的工具，它能处理线性、时延、甚至非线性的对象。在机电系统的测量、仿真、动态补偿和控制中都能有效地应用。

### 参 考 文 献

- [1]周兆英、杨进，动力学参数估计的频域方法。清华大学学报，1987，27(5)
- [2]Z. Zhou, J. Yang, Modelling in Frequency Domain and Its Application, ICMS' 88, 1988

- [3]周兆英、杨进、刘宏,传感器动力学参数估计. 磨床与磨削,1988,(3):62—65
- [4]Y. Zhang,Z. Zhou,Modelling of a Two-axis Actuator. ICMDEA'92,1992
- [5]L. Yang,P. Yan,H. Zhou,A Seismic Super Low Frequency Vibration Velocity Transducer. ICPR'91. 1991:1798—1800
- [6]宋刚,光盘库的理论、设计与控制实验研究. 清华大学博士论文,1992
- [7]R. Pintelon,L. Van Biesen,Identification of Transfer Functions with Time Delay and Its Application to Cable Fault Location. IEEE, Trans. Instrum Meas.,1990,39(3):479~484

## Modeling in Frequency Domain and Its Application in Electromechanical Systems

Zhou Zhaoying, Yang Jin, Zhang Yi and Song Gang

(Dept. of Precision Instrument and Mechanology, Tsinghua University, Beijing 100084)

### Abstract

This paper addresses an approach for dynamic parameters estimation in frequency domain. First, an outline of frequency domain modeling and its development is presented. The approach discussed here involves two step algorithm: an estimate of the spectral density function from input-output signals of a linear system and an estimate of its dynamic parameter from frequency response data obtained in the first step. Some parameter estimation algorithms are derived by minimizing a unified form of loss function using different selections of weights. At last, wide variety of application in electromechanical systems such as measurement, simulation, compensation and control is fully discussed.

**Key words:** Modeling, Parameters estimation, Frequency domain, Electromechanical systems